

ESERCIZI SULLO STUDIO DI FUNZIONI

10 novembre 2016

1 Esercizi

Esercizio n.1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 1} - 3$$

Dominio: \mathbb{R}

Intersezioni con gli assi:

Intersezioni con l'asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{7}{x^2 + 1} - 3. \end{cases}$$

$$\frac{7 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \frac{4 - 3x^2}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto i due punti di intersezione con l'asse x sono $A(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ e $B(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

Intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{7}{x^2 + 1}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $C(0, 4)$.

Positivita

Poniamo la funzione $f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^2 + 1} > 0$. Essendo il denominatore una quantit positiva, studiamo solo il segno del numeratore: $4 - 3x^2 > 0$. Pertanto la funzione  positiva per $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ o per $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$; la funzione  negativa per $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Simmetrie

La funzione  pari; infatti:

$$f(-x) = \frac{7}{(-x)^2 + 1} - 3 = \frac{7}{x^2 + 1} - 3 = f(x).$$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2 + 1} - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x^2 + 1} - 3 = -3$$

pertanto la retta $y = -3$  un asintoto orizzontale.

Massimi e minimi

Si passa allo studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{-7(2x)}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{14x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Pertanto si ha:

$$f'(x) = 0 \text{ se } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ se } x < 0$$

Si ha, quindi, che il punto $M(0, 4)$  un punto di massimo per la funzione.

Concavit

Si passa allo studio della derivate seconda.

$$f'' = \frac{-14(x^2 + 1)^2 + 14x(2(x^2 + 1))2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{(x^2 + 1)[-14(x^2 + 1) + 56x^2]}{(x^2 + 1)^4} = \frac{42x^2 - 14}{(x^2 + 1)^3}.$$

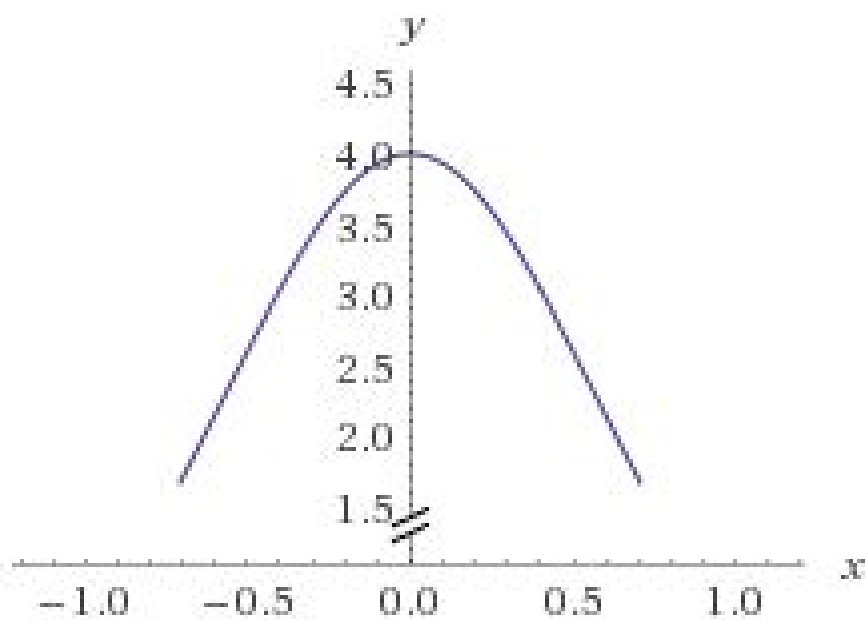
Pertanto si ha:

$$f''(x) = 0 \text{ se } x = \pm \frac{1}{3}$$

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < -\frac{1}{3} \text{ o } x > \frac{1}{3}$$

$$f''(x) < 0 \text{ se } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

I punti $F_1(-\frac{1}{3}, \frac{53}{10})$ e $F_2(\frac{1}{3}, \frac{53}{10})$ sono punti di flesso.



Esercizio n.2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

Dominio.

Poiché la funzione é razionale fratta, per determinare il dominio si vanno a ricercare quei valori che non annullano. Risolvendo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ si ottengono le soluzioni $x = -2$ e $x = 1$. Pertanto il dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Intersezioni con gli assi:

Non presenta intersezioni con l'asse x in quanto il numeratore, essendo un numero, non si annulla mai.

Intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{x^2 + x - 2} \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $A(0, -\frac{1}{2})$.

Positivité

Poniamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} > 0$. Essendo il numeratore una quantità positiva, studiamo solo il segno del denominatore: $x^2 + x - 2 > 0$. Pertanto la funzione é positiva per $x < -2$ o per $x > 1$; la funzione é negativa per $-2 < x < 1$.

Simmetrie

La funzione é pari; infatti:

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - x - 2} = \frac{1}{x^2 - x - 2}$. Pertanto la funzione non é né pari né dispari.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} = 0$$

pertanto la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale.
Calcoliamo i limiti nei punti esclusi dal dominio

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

Le rette $x = -2$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

Massimi e minimi

Si passa allo studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{-(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Pertanto si ha:

$$f'(x) = 0 \text{ se } x = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \text{ se } x < -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \text{ se } x > -\frac{1}{2}$$

Si ha, quindi, che il punto $M(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{9})$ é un punto di massimo per la funzione.

Concavitá

Si passa allo studio della derivate seconda.

$$f'' = \frac{-2(x^2 + x - 2)^2 + (2x + 1)(2(x^2 + x - 2))(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^4} =$$

$$\frac{(x^2 + x - 2)[-2(x^2 + x - 2) + 2(2x + 1)^2]}{(x^2 + x - 2)^4} = \frac{6(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x - 2)^3}.$$

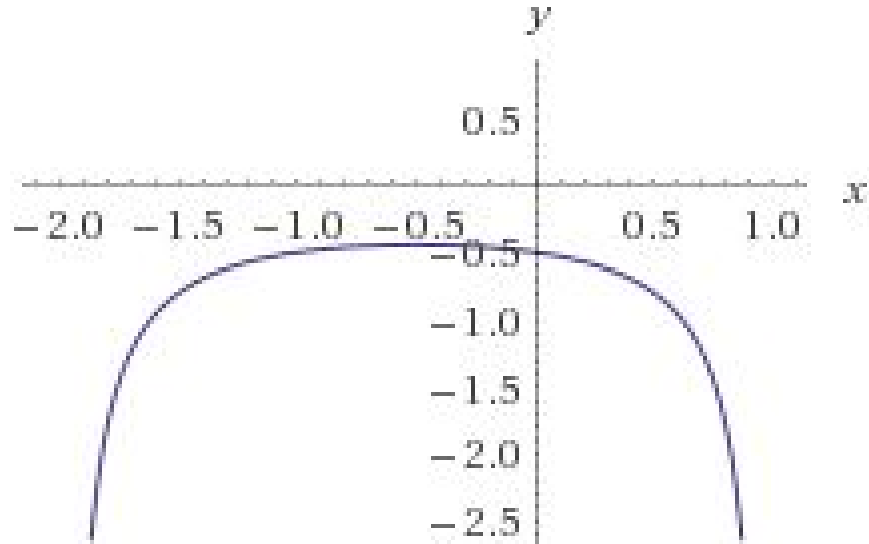
Pertanto si ha:

la $f''(x)$ non si annulla mai essendo il $\Delta < 0$

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < -2 \text{ o } x > 1$$

$$f''(x) < 0 \text{ se } -2 < x < 1$$

La funzione non presenta punti di flesso.

**Esercizio n.3**

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{x^2-1}$$

Dominio.

La funzione é definita su tutto \mathbb{R} , in quanto anche il dominio dell'esponente é tutto \mathbb{R} .

Intersezioni con gli assi:

La funzione non presenta intersezioni con l'asse x in quanto l'equazione $e^{x^2-1} = 0$ non ammette soluzioni; infatti, la funzione esponenziale ha per codominio l'intervallo $(0, \infty)$.

Intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^2-1}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $A(0, -\frac{1}{2})$.

Positivita

I valori assunti dalla funzione esponenziale sono i reali strettamente maggiori di zero, pertanto, la funzione in oggetto é positiva su tutto il suo dominio.

Simmetrie

La funzione é pari; infatti:

$$f(-x) = e^{(-x)^2-1} = e^{x^2-1} = f(x).$$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-1} = +\infty$$

La funzione, pertanto, non ammette asintoti orizzontali. Verifichiamo la presenza di un'eventuale asintoto obliquo del tipo $y = mx + q$.

Determiniamo il valore di m :

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x} = +\infty$. Essendo il limite divergente, la funzione non ammette asintoto obliquo.

Massimi e minimi

Si passa allo studio della derivata prima.

$$f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x.$$

Pertanto si ha:

$$f'(x) = 0 \text{ se } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ se } x < 0$$

Si ha, quindi, che il punto $m(0, \frac{1}{e})$ é un punto di minimo per la funzione.

Concavitá

Si passa allo studio della derivate seconda.

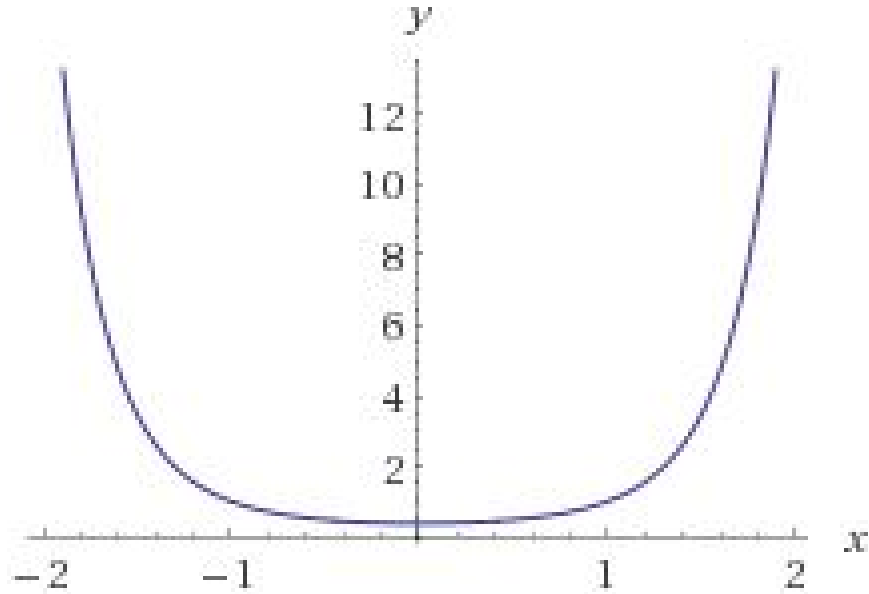
$$f'' = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2-1} \cdot 2x = e^{x^2-1}(4x^2 + 2).$$

Pertanto si ha:

che la $f''(x)$ non si annulla mai essendo i fattori strettamente positivi

$$f''(x) > 0 \text{ per ogn } x \in D.$$

La funzione non presenta punti di flesso.

**Esercizio n.4**

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$$

Dominio.

La funzione é definita su tutto $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, in quanto il dominio dell'esponente é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Intersezioni con gli assi:

La funzione non presenta intersezioni con l'asse x in quanto l'equazione $e^{\frac{x}{x+1}} = 0$ non ammette soluzioni; infatti, la funzione esponenziale ha per codominio l'intervallo $(0, \infty)$.

Intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x}{x+1}}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $A(0, 1)$.

Positivité

I valori assunti dalla funzione esponenziale sono i reali strettamente maggiori di zero, pertanto, la funzione in oggetto é positiva su tutto il suo dominio.

Simmetrie

La funzione non é né pari né dispari.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}} = e^1 = e$$

Pertanto, la retta $y = e$ é un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty$$

Ne segue che la retta $x = -1$ é un asintoto verticale.

Massimi e minimi

Si passa allo studio della derivata prima.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

Pertanto si ha:

la funzione $f'(x)$ non si annulla per nessun valore del dominio

$f'(x) > 0$ per ogni valore del dominio

La funzione non ammette né punti di massimo né punti di minimo.

Concavitá

Si passa allo studio della derivate seconda.

$$f'' = -\frac{e^{\frac{x}{x+1}}(2x+1)}{(x+1)^4}$$

Pertanto si ha:

$$f''(x) = 0 \text{ se } x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) < 0 \text{ se } x > -\frac{1}{2}$$

La funzione presenta un punto di flesso in $x = -\frac{1}{2}$.

