

1 Limiti e continuità per funzioni di una variabile

Considerazioni introduttive

Consideriamo la funzione

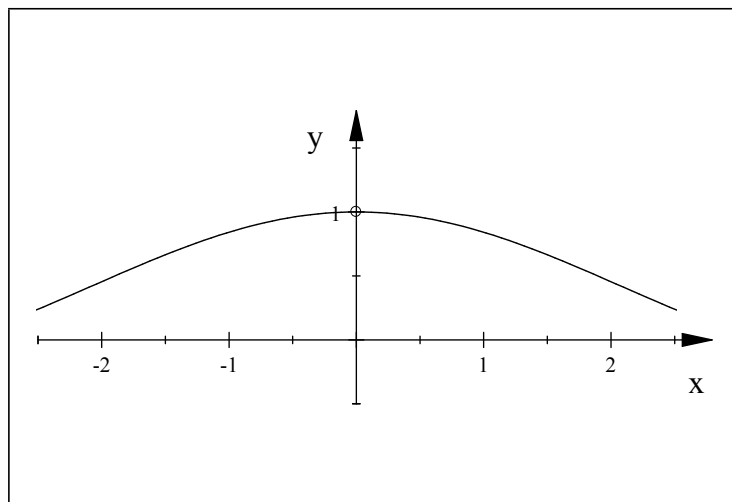
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

il cui dominio naturale è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Problema: non è possibile calcolare il valore di f per $x = 0$, perchè 0 non appartiene al dominio. E' possibile valutare il comportamento di f se la x , a partire da un valore "prossimo a" 0, si avvicina "quanto più possibile" a 0? Calcoliamo i valori di x in radianti, $\sin(x)$ e $\frac{\sin(x)}{x}$, a partire da $x = 1$ fino ad avvicinarci a $x = 0$.

x	$\sin x$	$\sin x/x$
1,0000000000000000	0,841470984807896	0,841470984807896
0,5000000000000000	0,479425538604203	0,958851077208406
0,4000000000000000	0,389418342308650	0,973545855771626
0,3000000000000000	0,295520206661340	0,985067355537799
0,2000000000000000	0,198669330795061	0,993346653975306
0,1000000000000000	0,099833416646828	0,998334166468282
0,0500000000000000	0,049979169270678	0,999583385413567
0,0400000000000000	0,039989334186634	0,999733354665854
0,0300000000000000	0,029995500202496	0,999850006749855
0,0200000000000000	0,019998666693333	0,999933334666654
0,0100000000000000	0,009999833334167	0,999983333416667
0,0050000000000000	0,004999979166693	0,999995833338542
0,0040000000000000	0,003999989333342	0,999997333335467
0,0030000000000000	0,002999995500002	0,999998500000675
0,0020000000000000	0,001999998666667	0,999999333333466
0,0010000000000000	0,000999998333333	0,999999833333342
0,0005000000000000	0,00049999979167	0,999999958333334
0,0001000000000000	0,000099999998333	0,999999998333333
0,0000500000000000	0,00004999999979	0,999999999583333
0,0000100000000000	0,000010000000000	0,999999999833333
0,0000050000000000	0,000005000000000	0,999999999958333
0,0000010000000000	0,000001000000000	0,999999999998333

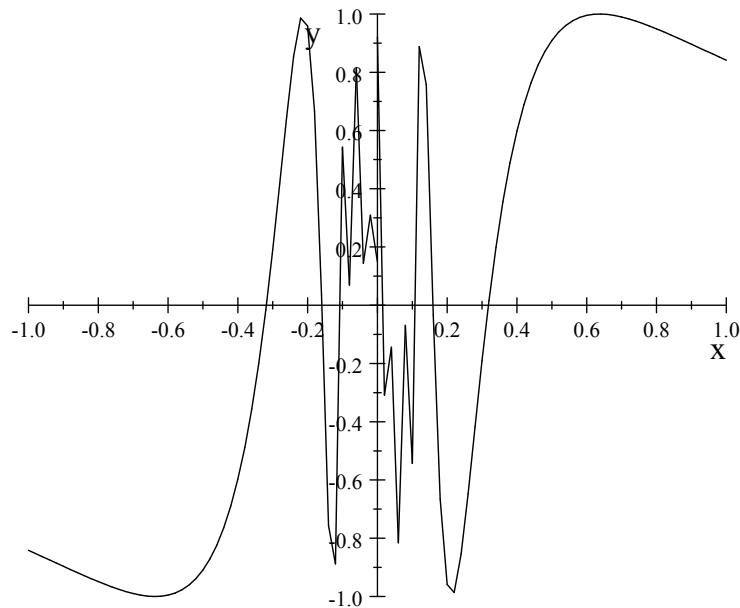
Il rapporto $\frac{\sin x}{x}$ si avvicina sempre più a 1, come si può riscontrare nel grafico della funzione



Possiamo riassumere questo comportamento dicendo che, per x che "tende" a 0, $\frac{\sin x}{x}$ "tende" a 1 cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Se invece consideriamo altre funzioni, non sempre è possibile decidere il loro comportamento in prossimità di un dato punto usando un foglio di calcolo o un grafico. Esempio: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



x	$1/x$	$\sin 1/x$
1,0000000000000000	1,0000000000000000	0,841470984807897
0,5000000000000000	2,0000000000000000	0,909297426825682
0,4000000000000000	2,5000000000000000	0,598472144103957
0,3000000000000000	3,3333333333333330	-0,190567962875485
0,2000000000000000	5,0000000000000000	-0,958924274663138
0,1000000000000000	10,0000000000000000	-0,544021110889370
0,0500000000000000	20,0000000000000000	0,912945250727628
0,0400000000000000	25,0000000000000000	-0,132351750097773
0,0300000000000000	33,333333333333300	0,940529576628763
0,0200000000000000	50,0000000000000000	-0,262374853703929
0,0100000000000000	100,0000000000000000	-0,506365641109759
0,0050000000000000	200,0000000000000000	-0,873297297213995
0,0040000000000000	250,0000000000000000	-0,970528019541805
0,0030000000000000	333,333333333333000	0,318846344358746
0,0020000000000000	500,0000000000000000	-0,467771805322476
0,0010000000000000	1000,0000000000000000	0,826879540532003
0,0005000000000000	2000,0000000000000000	0,930039504416137
0,0001000000000000	10000,0000000000000000	-0,305614388888252
0,0000500000000000	20000,0000000000000000	0,581984761994295
0,0000100000000000	100000,0000000000000000	0,035748797986561
0,0000050000000000	200000,0000000000000000	-0,071451895241553
0,0000010000000000	1000000,0000000000000000	-0,349993502171308

LIMITI DI FUNZIONI

Estendiamo la definizione di limite dalle successioni alle funzioni. Una successione dipende da una variabile $n \in \mathbb{N}$, quindi l'operazione di limite serve a descrivere il suo comportamento asintotico, ovvero per $n \rightarrow +\infty$. Mentre per una funzione f definita per esempio su un intervallo (a, b) è possibile descrivere il suo andamento sia agli estremi dell'intervallo sia in qualsiasi punto tra a e b .

Intorno di un punto. Si chiama **intorno completo** di un numero reale o di un punto c un qualsiasi intervallo aperto che contenga c . In particolare gli intervalli aperti di *centro* c si chiamano **intorni circolari** di c . Se indichiamo con ε il raggio di tale intorno, lo indicheremo con

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$$

e risulta essere l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$|x - c| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, escluso al massimo un punto c interno ad esso.

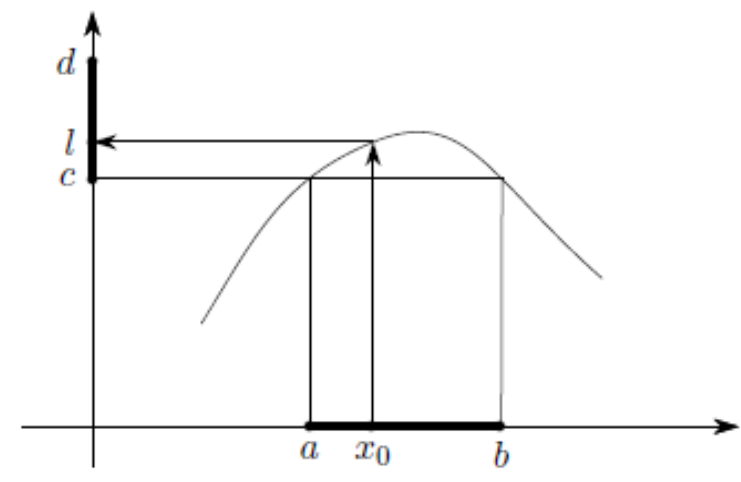
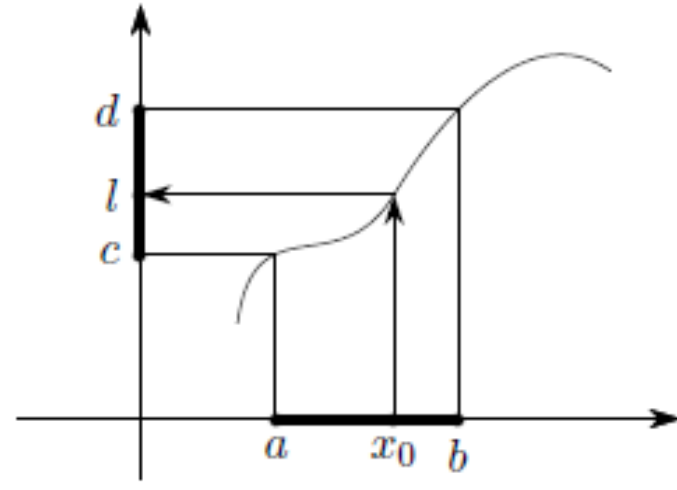
Limite finito di una funzione in un punto

Definizione 1 *La funzione $f(x)$ per $x \rightarrow c$ ha per limite il numero l*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

quando in corrispondenza di un arbitrario numero positivo ε , si può sempre determinare un intorno completo H del punto c , tale che, $\forall x \in [a, b]$ che cade in H , escluso eventualmente c , risulti soddisfatta la disequazione

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$



Esempio 1. Verificare che risulta $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$. La funzione è definita su tutto \mathbb{R} .

Preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario e piccolo, verifichiamo che la disequazione

$$|2x - 1 - 3| < \varepsilon$$

è verificata per tutti i valori di x che formano un intorno completo del punto 2.

$$|2x - 4| < \varepsilon \rightarrow 4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon$$

$$2 - \varepsilon/2 < x < 2 + \varepsilon/2 \text{ intorno del punto } 2$$

Osservazione. $f(2) = 3$ e perciò in questo caso risulta che $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = f(2)$: **il limite coincide con il valore della funzione nel punto** $x = 2$.

Esempio 2. Verificare che risulta $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. La funzione è definita per $x > 0$ con $x \neq 2$

Preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario e piccolo, verifichiamo che la disequazione

$$\left| \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \right| < \varepsilon$$

è verificata per tutti i valori di x che formano un intorno completo del punto 2, escluso $x = 2$ dove la funzione non è definita.

Ma poichè $x \neq 2$

$$\frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$$

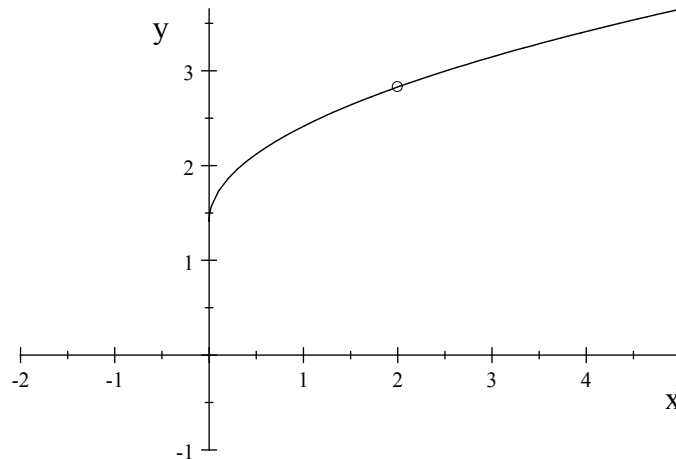
e possiamo scrivere che

$$\left| \sqrt{x} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \right| < \varepsilon \text{ cioè } \sqrt{2} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{2} + \varepsilon$$

Quindi risolvendo il sistema e supponendo che $\varepsilon < \sqrt{2}$ si trova che

$$\left(\sqrt{2} - \varepsilon\right)^2 < x < \left(\sqrt{2} + \varepsilon\right)^2 \text{ intorno di } 2.$$

Osservazione. **Non esiste il valore della funzione per $x = 2$ ma esiste il suo limite.**



Esempio 3. Data la funzione, definita su \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x \neq 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Quindi dobbiamo verificare prefissato un $\varepsilon > 0$ che

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$

sia soddisfatta in tutti i punti di un intorno del punto 1 escluso al più 1 stesso.

Per $x \neq 1$ si ha $f(x) = 2$ quindi verifichiamo che

$$|2 - 2| < \varepsilon \text{ ossia } \varepsilon > 0$$

ed è soddisfatta in qualsiasi intorno del punto 1.

Osservazione. In questo caso abbiamo

$$f(1) = 0 \text{ mentre } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

quindi **il limite della funzione nel punto 1 è diverso dal valore della funzione calcolato nello stesso punto.**

Limite infinito di una funzione in un punto

Definizione 2 Si dice che la funzione $f(x)$ per $x \rightarrow c$ ha per limite infinito

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

quando in corrispondenza di un numero positivo M fissato a piacere, è possibile determinare un intorno H completo del punto c , tale che, $\forall x \in [a, b] \cap H$ con $x \neq c$ risulti soddisfatta la disequazione

$$|f(x)| > M$$

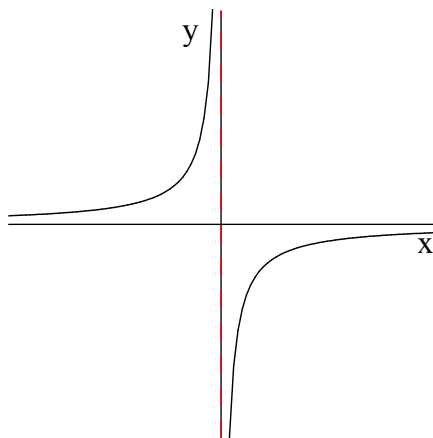
Esempio. Verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. Dominio $x \neq 0$

Verifichiamo che $\left| -\frac{1}{x} \right| > M$, qualunque sia il numero $M > 0$ per tutti gli x che formano un intorno di 0.

$$\left| -\frac{1}{x} \right| > M \rightarrow |x| < \frac{1}{M} \rightarrow -\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M}$$

In questo caso avremo che

$$\left(-\frac{1}{x} \right) > 0, \text{ per } x < 0; \quad \left(-\frac{1}{x} \right) < 0, \text{ per } x > 0$$



Limite destro e limite sinistro

Definizione 3 Si dice che l è il limite destro della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow c$ e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

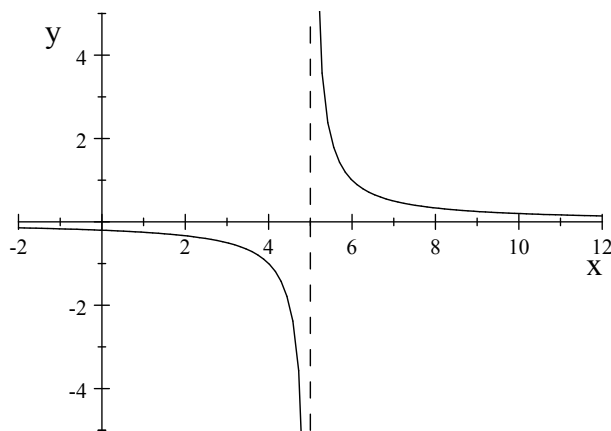
quando in corrispondenza di un arbitrario numero positivo ε , si può sempre determinare un intorno **destro** H di c , tale che, $\forall x \in [a, b] \cap H$ escluso eventualmente c risulti soddisfatta la disequazione

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Osservazione 4 Se l'intorno H è un intorno **sinistro** del punto c , allora si dice che l è il limite sinistro di $f(x)$ per $x \rightarrow c^-$. Analoghe definizioni si possono dare per limiti infiniti di una funzione in un punto.

Osservazione 5 Se il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ per $x \rightarrow c$ esistono e sono uguali e pari a l allora l è il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow c$.

- *Asintoti verticali.* Quando $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per x che tende a c da destra e/o da sinistra, si dice che la retta di equazione $x = c$ è **asintoto verticale** per il grafico di f . *Esempio.* $f(x) = 1/(x - 5)$



Limite finito (o infinito) di una funzione all'infinito

Definizione 6 Sia f una funzione definita in \mathbb{R} . Si dice che la funzione $f(x)$ per $x \rightarrow \infty$ ha per limite il numero l

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

quando in corrispondenza di un arbitrario numero positivo ε , si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che per ogni x che verifica $|x| > N$ si abbia

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Se questa è soddisfatta soltanto:

- per $x > N$, allora: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

- per $x < N$, allora: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Definizione 7 Si dice che per $x \rightarrow \infty$ la funzione $f(x)$ ha per limite infinito,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

quando in corrispondenza di un arbitrario $M > 0$ è sempre possibile determinare un numero $N > 0$ tale che per ogni x che verifica $|x| > N$ si abbia

$$|f(x)| > M$$

In particolare se $x > N$, risulta:

- per $f(x) > M$, allora: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- per $f(x) < -M$, allora: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Mentre se $x < -N$, risulta:

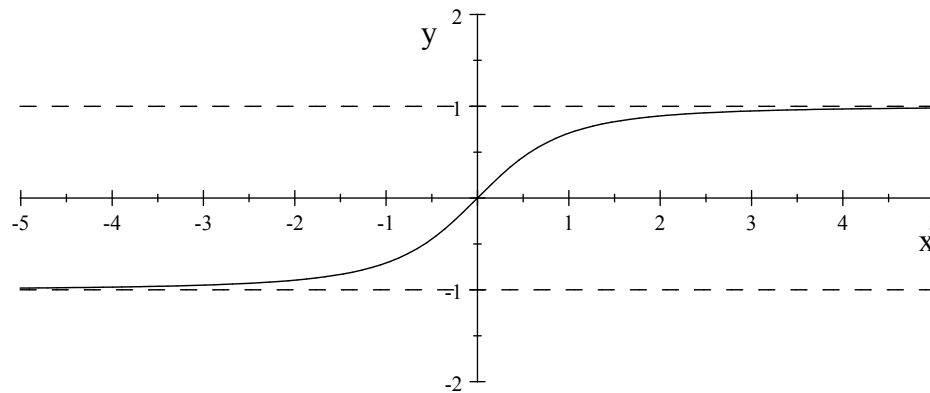
- per $f(x) > M$, allora: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- per $f(x) < -M$, allora: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- *Asintoti orizzontali.* Quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ la retta di equazione $y = l$ ha un ruolo importante è prende il nome di *asintoto orizzontale*.

Esempio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



Il dominio di $f(x)$ sarà \mathbb{R} . In questo caso non esistono asintoti verticali.

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{|x| \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)} = 1$$

la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{|x| \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)} = -1$$

la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale.

- *Asintoti obliqui.* Possono aversi solo nel caso di funzioni definite in intervalli illimitati. Se si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$$

potrebbe esistere asintoto obliquo. In questo caso il grafico della funzione si accosta a quello di una retta di equazione

$$y = mx + q \quad \text{con } m \neq 0$$

Affinchè questa retta sia un asintoto obliquo della funzione occorre che esistano e siano finiti entrambi i seguenti limiti:

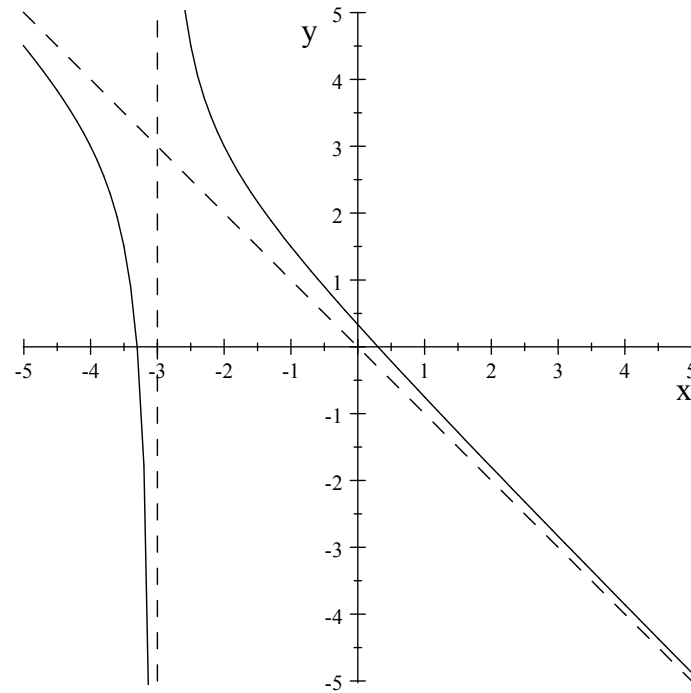
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q$$

In maniera analoga si procede se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$$

Esempio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - 3x - x^2}{x + 3}$$



Il dominio della funzione sarà $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow -3^{\pm}} \frac{1 - 3x - x^2}{x + 3} = \pm\infty$$

la retta $x = -3$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 3x - x^2}{x + 3} = \mp\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali ma possono esserci asintoti obliqui. Avremo

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 3x - x^2}{x^2 + 3x} = -1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - 3x - x^2}{x + 3} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 3} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione ha come asintoto obliquo la sola retta $y = -x$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Definizione 8 Una funzione f che ha limite pari a 0 per $x \rightarrow c$ (finito o infinito) si chiama **infinitesimo** per $x \rightarrow c$ (finito o infinito). Una funzione f che ha limite pari a $\pm\infty$ per $x \rightarrow c$ (finito o infinito) si chiama **infinito** per $x \rightarrow c$ (finito o infinito).

Teorema 9 (unicità del limite) Se esiste il limite di una funzione per $x \rightarrow c$ (finito o infinito), esso è unico.

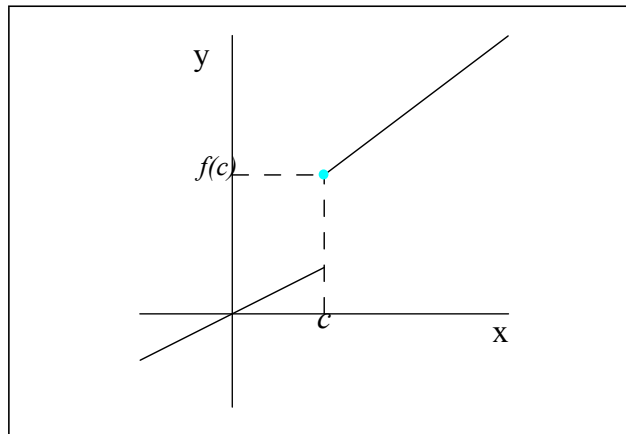
Teorema 10 Siano $a < c < b$ e f monotona nell'intervallo (a, b) . Allora i limiti

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

esistono e sono entrambi finiti. Esistono anche (finiti o infiniti)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Esempio



Il limite destro, $x \rightarrow c^+$, coincide con $f(c)$, il valore che la funzione assume nel punto c , che coincide con il *minimo* di f nell'intervallo $[c, b)$ dove $b = +\infty$. Il limite sinistro di c invece è strettamente minore di $f(c)$. Risulta quindi che

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Teorema 11 (Permanenza del segno) *Se per $x \rightarrow c$ la funzione ha un limite finito l non nullo, esiste un intorno del punto c per ogni x del quale, escluso al più c , la funzione $f(x)$ assume valori dello stesso segno del suo limite. Il teorema vale anche se $l = \pm\infty$.*

Teorema 12 (Confronto) *Siano f , g , e h tre funzioni che, in un opportuno intorno di c , soddisfano le disuguaglianze*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

1. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$, allora anche $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$
2. Il teorema vale anche se $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$.

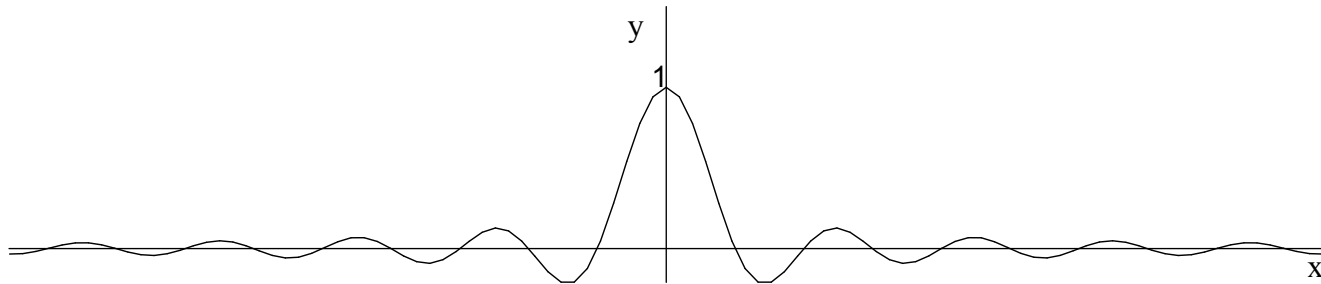
Esempio. 1° limite notevole. Provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Infatti sappiamo che $-1 \leq \sin x \leq 1$ e per $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1/x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 0$, quindi per il confronto anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.



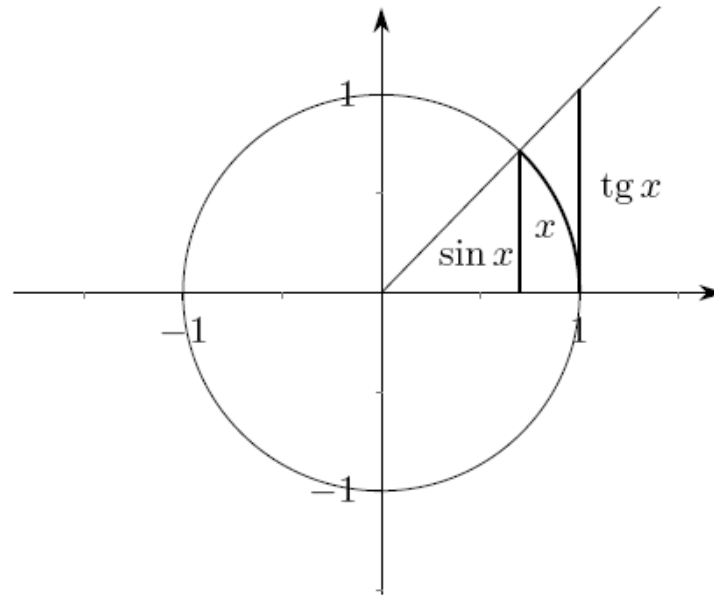
Esempio. 2° limite notevole. Provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Osserviamo preventivamente che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è una funzione *pari* (simmetrica rispetto all'asse y). Quindi basterà calcolare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

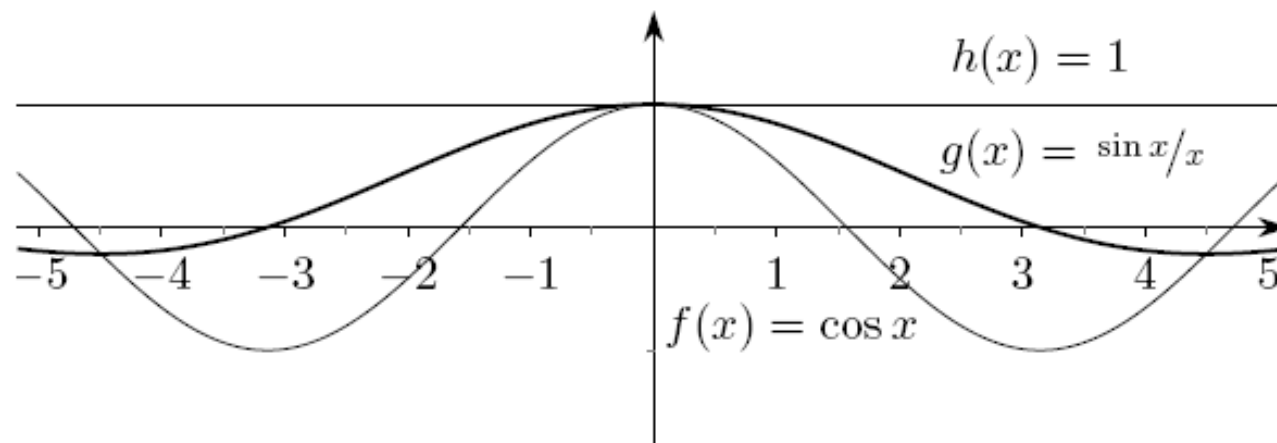
Per le note proprietà trigonometriche si ha , per $0 < x < \pi/2$

$$\sin x < x < \tan x$$



Ora dividiamo per $\sin x$ (sempre positivo e non nullo per $0 < x < \pi/2$) la disuguaglianza $\sin x < x < \tan x$ e otteniamo

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$



Passando ai reciproci abbiamo

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per il teorema del confronto, essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$, uguale per la funzione costante pari a 1, avremo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Limiti e operazioni algebriche (insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

Definiamo per i simboli $\pm\infty$ le operazioni di somma e prodotto e $a \in \mathbb{R}$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$	$A + (\pm\infty) = \pm\infty$
$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$	$(\mp\infty) \cdot (\pm\infty) = -\infty$	$A \neq 0, A \cdot \infty = \infty$
$\frac{A}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{A} = \infty$	$A \neq 0, \frac{A}{0} = \infty$

Esistono forme come già introdotto nelle successioni che sono *indeterminate*:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

e altre forme di indeterminazione di tipo *esponenziale* che possono presentarsi quando si deve calcolare un limite della forma $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{g(x)}$ e sono

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Date due funzioni f, g definite sullo stesso intervallo, possiamo costruire le funzioni *somma*, *prodotto* e *quoziente*

$$f + g \quad f \cdot g \quad f/g \text{ (con } g \neq 0\text{)}$$

Se $L, M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ possiamo affermare che se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x) = L + M, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = LM, \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

tranne se se verificano le forme indeterminate già introdotte.

Confronti: richiamo simboli "o" e " ~ "

Supponiamo che f, g siano *infinitesimi* (oppure *infiniti*) per $x \rightarrow c$ con $g \neq 0$. Consideriamo il limite di f/g . avremo 4 possibilità:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & (a) \\ L \text{ finito e non nullo} & (b) \\ \pm\infty & (c) \\ \text{non esiste} & (d) \end{cases}$$

(a) $\implies f$ è *infinitesimo di ordine superiore a g* (oppure f è *infinito di ordine inferiore a g*) e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow c$$

(b) $\implies f$ è dello stesso ordine di g per $x \rightarrow c$. In particolare, se $L = 1$, le due funzioni si dicono *asintotiche* per $x \rightarrow c$ e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow c$$

(c) $\implies f$ è *infinitesimo di ordine inferiore* a g (oppure f è *infinito di ordine superiore* a g) e si scrive

$$g(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow c$$

(d) $\implies f$ e g non sono confrontabili.

La relazione " \sim " esprime un'*equivalenza* di comportamento di fronte all'operazione di limite e possiede le tre proprietà:

- riflessiva: $f(x) \sim f(x)$ per $x \rightarrow c$;
- simmetrica: $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow c$ se e solo se $g(x) \sim f(x)$ per $x \rightarrow c$;
quindi le due funzioni sono asintotiche;
- transitiva: se $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow c$ e $g(x) \sim h(x)$ per $x \rightarrow c$ allora
 $f(x) \sim h(x)$ per $x \rightarrow c$.

Il simbolo "o" gode invece della proprietà transitiva:

- se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow c$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \rightarrow c$, allora
 $f(x) = o(h(x))$ per $x \rightarrow c$.

Il simbolo asintotico è particolarmente utile nel calcolo dei limiti. Infatti è possibile sostituire nel calcolo del limite di un prodotto o di un quoziente, ogni funzione con una ad essa asintotica (più semplice) in modo da facilitare il calcolo. Se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \rightarrow c$ e $g_1(x) \sim g_2(x)$ per $x \rightarrow c$ è immediato che

$$\lim_{x \rightarrow c} f_1(x)g_1(x) = \lim_{x \rightarrow c} f_2(x)g_2(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Esempio: Il rapporto tra due polinomi nella variabile n , per $n \rightarrow +\infty$, è asintotico al rapporto dei termini di grado massimo

$$\frac{-n^3 + n^2 - 3n + 4}{2n^4 + 2n^3 - 4} \sim \frac{-n^3}{2n^4} = -\frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

Gerarchie di infiniti.

Se $\alpha < \beta$ avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-\beta} = +\infty$$

e quindi per $\alpha < \beta$ si ha

$$x^\alpha = o(x^\beta) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, \quad x^\beta = o(x^\alpha) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Quindi tra le *potenze* di x , per $x \rightarrow +\infty$, sono *trascurabili* quelle con esponente *minore*, mentre per $x \rightarrow 0$ quelle con esponente *maggiore*.

Anche le *esponenziali* con base diversa si posso "ordinare". Per esempio

$$2^x = o(3^x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, \quad \text{infatti } \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \rightarrow 0$$

.

Osservazione. Si possono confrontare tra loro le tre famiglie di funzioni: esponenziali, potenze e logaritmi.

Teorema 13 *Ogni infinito esponenziale è d'ordine superiore a ogni infinito potenza; ogni infinito potenza è di ordine superiore ad ogni infinito logaritmico. Ossia per ogni $\alpha > 1, \beta > 0, \gamma > 0$*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{x^\beta} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = +\infty$$

Esempi. Si vogliono calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - x^4), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - x^4) = 3^x \left(1 - \frac{x^4}{3^x}\right) \rightarrow (+\infty)(1 - 0) = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) \rightarrow (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

Calcolo di alcuni limiti usando i limiti notevoli visti in precedenza.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{(1 + \cos x)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ Il calcolo di questo limite fornisce l'occasione per mostrare la tecnica del cambiamento di variabile, di frequentissima applicazione. Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \rightarrow c} f[g(x)]$$

sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = k$. Poniamo $y = g(x)$ e calcoliamo $\lim_{y \rightarrow k} f(y)$.
 E' possibile fare il cambio di variabile se $\lim_{y \rightarrow k} f(y) = f(k)$, ovvero se f è **continua** in k e vale anche nel caso in cui k sia $\pm\infty$. Poniamo

$$\arcsin x = t \text{ e quindi } x = \sin t$$

se $x \rightarrow 0$ allora $t \rightarrow 0$ e quindi avremo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

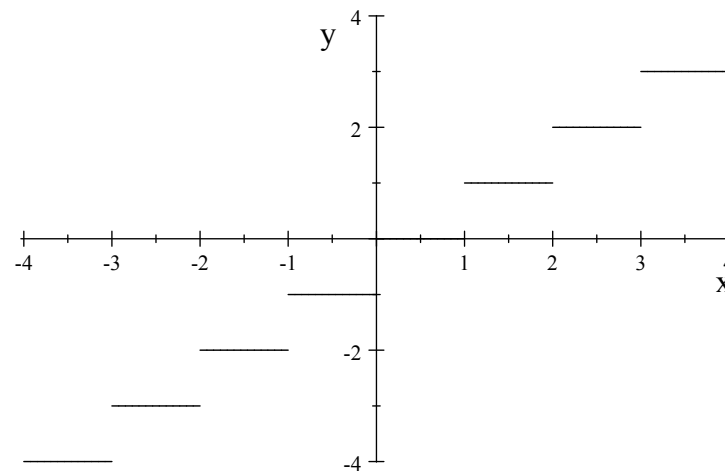
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ Poniamo $e^x - 1 = t \rightarrow x = \ln(t + 1)$ e se $x \rightarrow 0$ allora anche $t \rightarrow 0$. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t + 1)} = 1$$

FUNZIONI CONTINUE

Osserviamo il grafico della funzione parte intera

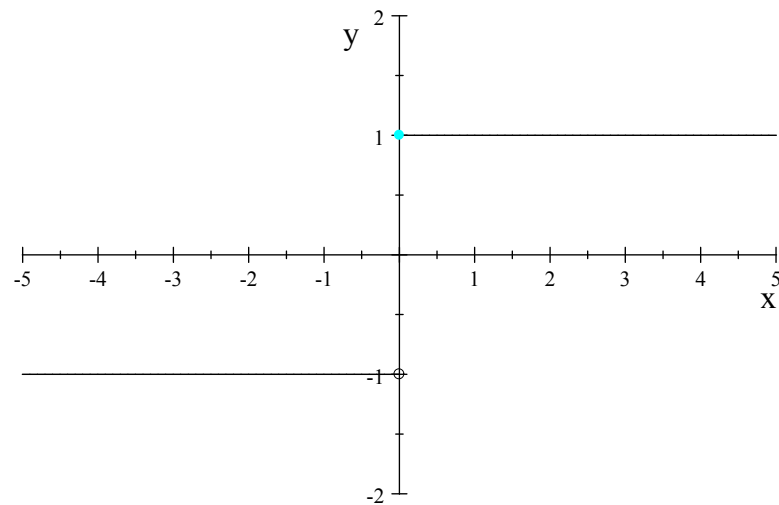
$$f(x) = [x]$$



Il grafico procede a salti. La funzione è *discontinua* nei punti di ascissa intera.

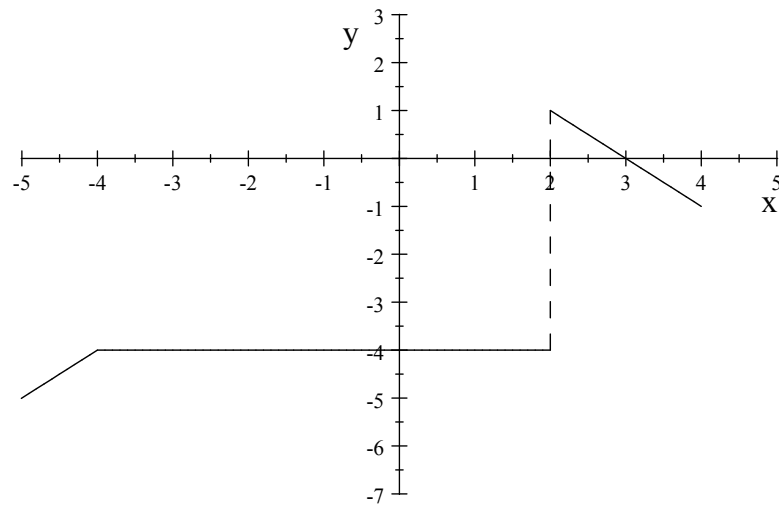
Altrettanto per le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



discontinua in $x = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq -4 \\ -4 & \text{if } -4 < x < 2 \\ 3 - x & \text{if } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$



continua in tutto l'asse reale escluso il punto $x = 2$.

Una funzione f è **continua** in un punto x_0 , se, variando *di poco* x_0 , cioè considerando il punto $x_0 + \Delta x$ molto vicino a x_0 , il corrispondente valore della $f(x)$ cioè $f(x_0 + \Delta x)$ differisce *poco* da $f(x_0)$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La differenza $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ prende il nome di **incremento della funzione** nel passaggio della variabile indipendente dal valore x_0 al valore $x_0 + \Delta x$.

Definizione 14 Siano f definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che f è *continua in un insieme* I se f è continua in tutti i punti di I .

Dalle operazioni sui limiti e dalla definizione di continuità in un punto si possono trarre le seguenti considerazioni:

- a)** se f e g sono due funzioni entrambe continue in x_0 allora anche la loro somma $f + g$ e il loro prodotto $f \cdot g$ sono funzioni continue in x_0 ;
- b)** se f e g sono due funzioni entrambe continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora anche la funzione quoziente f/g è continua in x_0 ;

c) se f e g sono due funzioni entrambe continue in x_0 e $f(x_0) > 0$, anche la funzione potenza f^g è continua in x_0 .

Per le *funzioni composte* vale il seguente teorema.

Teorema 15 Se f è continua in $x_0 \in I$ e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$, ($g[f(x)]$), è continua in x_0 .

Osservazione. Le funzioni elementari *potenza, esponenziali, logaritmiche, seno e coseno* sono **continue** in ogni punto del loro dominio. Infatti $\forall x_0 \in D$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha &= x_0^\alpha, & \lim_{x \rightarrow x_0} a^x &= a^{x_0}, & \lim \log_a x &= \log_a x_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= \sin x_0, & \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x &= \cos x_0 \end{aligned}$$

Punti di discontinuità

Richiedere che una funzione sia continua in un punto x_0 equivale a richiedere che i due limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

- *esistono* e sono *finiti*,
- sono *uguali*,
- il loro valore comune è proprio $f(x_0)$.

Se *almeno* una delle tre condizioni non è soddisfatta si dice che f è *discontinua* in x_0 oppure che x_0 è un *punto di discontinuità*.

1. **Discontinuità di prima specie.** Se

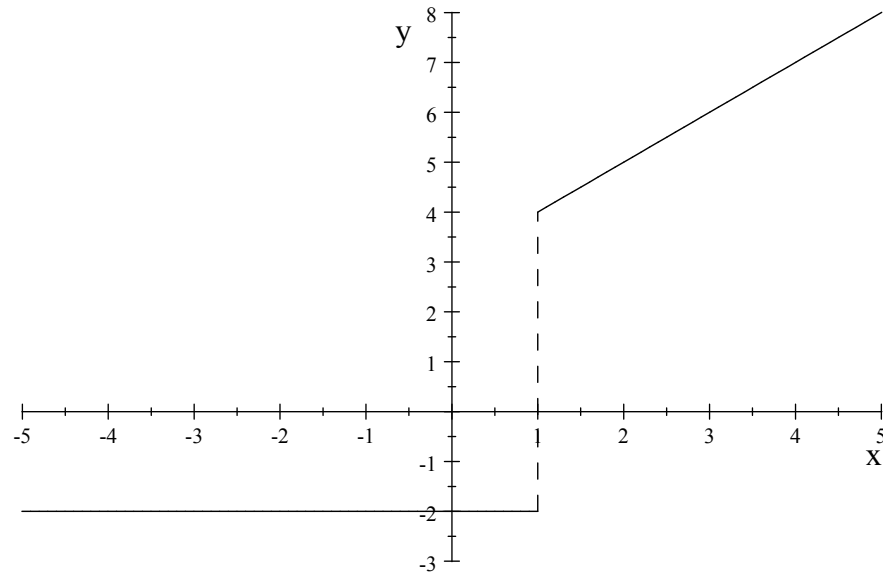
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2 \quad (l_1 \neq l_2)$$

si dice che la funzione f ha in x_0 una discontinuità di prima specie. La differenza

$$l_2 - l_1$$

si chiama *salto* della funzione in corrispondenza di x_0 . Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{if } x \geq 1 \\ -2 & \text{if } x < 1 \end{cases}$$



ha nel punto $x_0 = 1$ una discontinuità di prima specie essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$$

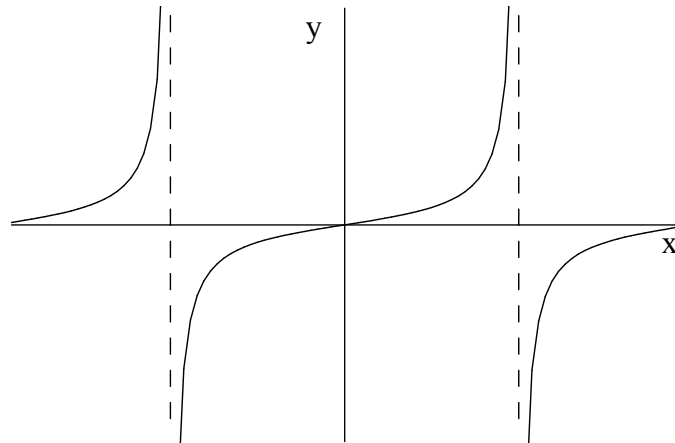
con salto pari a 6.

2. **Discontinuità di seconda specie.** Se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

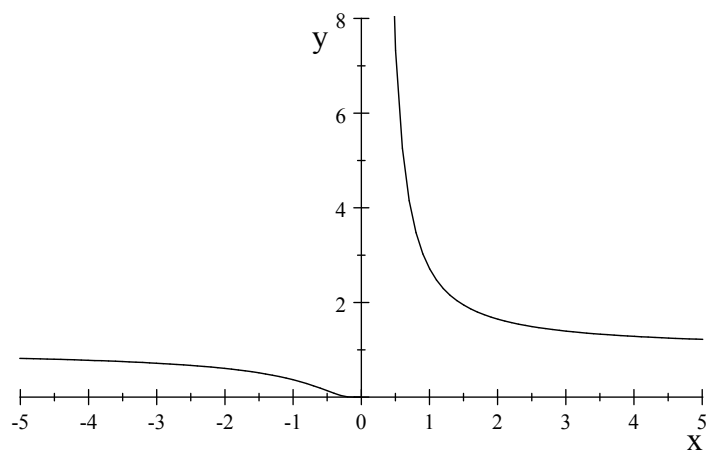
o non esiste oppure se esiste è infinito, si dice che la f ha nel punto x_0 una discontinuità di seconda specie. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \tan x$$



ha in $x_0 = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) discontinuità di seconda specie. Anche

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$



ha nel punto $x_0 = 0$ ($D = \mathbb{R} / \{0\}$) una discontinuità di seconda specie essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

3. **Discontinuità di terza specie.** Se esiste ed è finito il limite della funzione in x_0

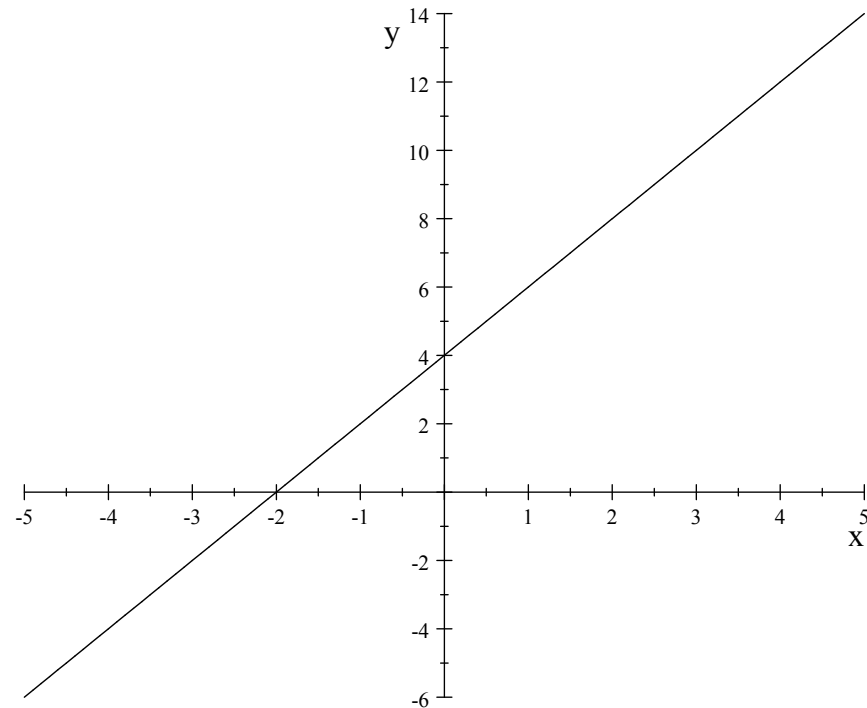
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

ma, o non esiste $f(x_0)$ oppure $f(x_0) \neq l$, si dice che la funzione f ha in x_0 una discontinuità di terza specie o *eliminabile*. Infatti è possibile eliminare tale discontinuità attribuendo alla funzione nel punto x_0 il valore del limite in quel punto

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ l & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$$



è continua $\forall x \neq 2$ e ha nel punto $x_0 = 2$ una discontinuità di terza specie: infatti, pur non esistendo $f(2)$, esiste ed è finito il suo limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 8$$

Tale funzione può essere resa continua anche nel punto $x_0 = 2$ definendola come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & \text{per } x \neq 2 \\ 8 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$

Osservazione. Se una funzione è discontinua nel punto x_0 , può darsi che uno dei due limiti destro o sinistro coincida con $f(x_0)$. In tal caso diremo che la f è *continua da destra* o *da sinistra* in x_0 .

Continuità delle funzioni inverse.

Ricordiamo brevemente che data una funzione $f : X \rightarrow Y$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, la sua inversa se esiste è unica ed è la funzione $f^{-1} : Y \rightarrow X$ tale che

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

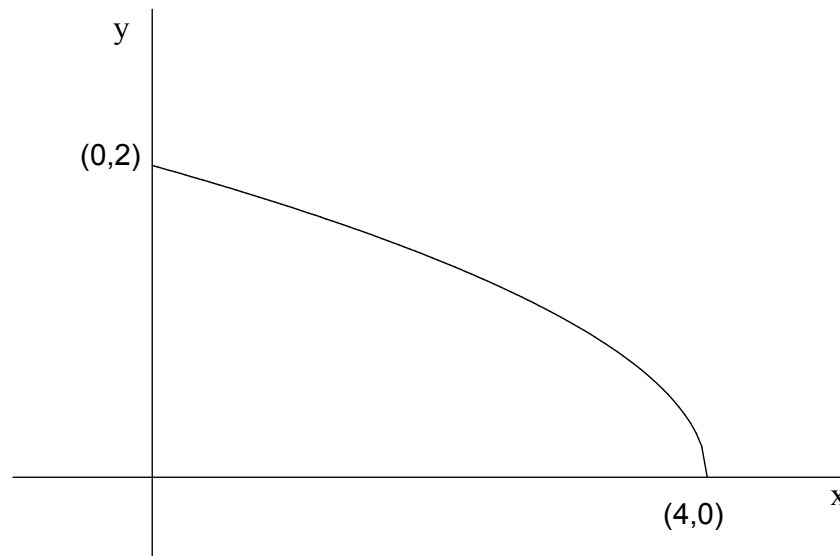
Riguardo alla continuità di f^{-1} vale il seguente teorema

Teorema 16 *Se una funzione $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ biunivoca e continua. Allora la sua inversa f^{-1} è anch'essa continua in (c, d) .*

Se f continua in (a, b) è invertibile, allora deve essere *strettamente monotona*.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x) : [0, 4] \rightarrow [0, 2] / x \rightarrow \sqrt{4 - x}$$

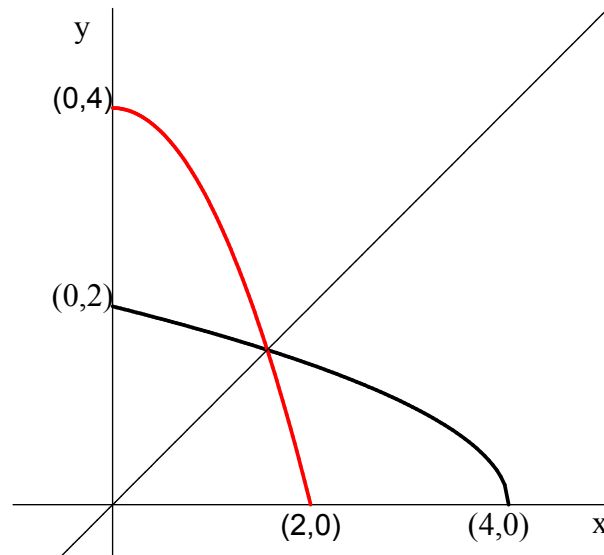


Essa è continua e strettamente decrescente in $[0, 4]$. La sua funzione inversa

$$f^{-1}(x) : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$$

$$y = \sqrt{4 - x} \rightarrow x = 4 - y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = 4 - x^2$$

il grafico dell'inversa è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante



La f^{-1} è chiaramente continua in $(0, 2)$ e strettamente decrescente.

Teoremi fondamentali sulle funzioni continue.

Teorema 17 (Esistenza degli zeri) *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Se i valori di f negli estremi dell'intervallo sono di segno opposto, cioè se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ha almeno uno zero in (a, b) , ossia esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$f(c) = 0$$

Se f è strettamente monotona allora lo zero è unico.

Il metodo usato per dimostrare questo teorema si chiama anche *metodo di bisezione* ed è anche un metodo pratico per trovare una approssimazione di uno zero, nel caso non sia possibile trovarlo con i metodi tradizionali dell'algebra. Si considera il punto medio, m_0 di $[a, b]$: se $f(m_0) = 0$ allora abbiamo finito.

Se invece $f(m_0) \neq 0$ si considera il nuovo intervallo $[a_1, b_1] = [a_0, m_0]$ se $f(a_0) \cdot f(m_0) < 0$, altrimenti $[a_1, b_1] = [m_0, b_0]$: in ogni caso si avrà $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Ripetendo il discorso su $[a_1, b_1]$, o si conclude con un punto c come richiesto o si procede ancora. Segnaliamo che, anche in casi semplici, è possibile che “occorrano tutti i passi” della dimostrazione, cioè che non si concluda in un numero finito di passi: basta considerare la funzione $f(x) = x^2 - 2$, nell’intervallo $[0, 2]$, con $f(0) = -2$ e $f(2) = 2$; in tale intervallo la funzione si annulla per il numero irrazionale $c = \sqrt{2}$.

Teorema 18 (Dei valori intermedi) *Sia f una funzione continua nell’intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Presi due punti c e d arbitrariamente tra a e b , il teorema si può applicare anche all’intervallo $[c, d]$: se ne deduce che la funzione assume tutti i valori compresi tra due suoi valori qualunque. Per questo si chiama “teorema di tutti i valori”.

Teorema 19 (Weierstrass) *Se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora assume massimo e minimo, ossia esistono almeno due punti x_1 e x_2 in $[a, b]$, tali che, $\forall x \in [a, b]$ si ha*

$$m := f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) =: M$$

Osservazione 1. Il massimo e il minimo di una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ possono cadere tanto nei punti interni all'intervallo, quanto negli estremi di esso, oppure uno all'interno l'altro in un estremo.

Perciò se la funzione f è strettamente crescente (decrescente) in $[a, b]$, essa raggiunge il massimo (minimo) nell'estremo destro b , mentre raggiunge il minimo (massimo) nell'estremo sinistro a .

Osservazione 2. Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume, almeno una volta, qualunque valore compreso tra il suo minimo e il suo massimo (per il teorema degli zeri).